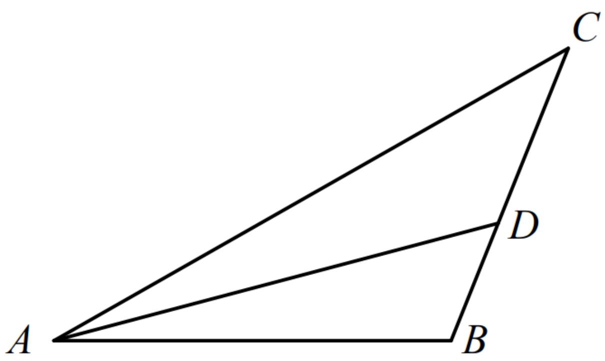
Стрим 28 сентября. Разбор Тренировочной работы по математике, Статград

1. Решите уравнение $\frac{5}{x^2-11}=1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

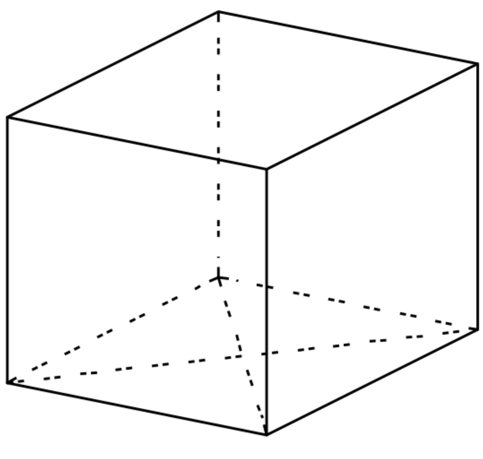
2. В соревнованиях по толканию ядра участвуют спортсмены из четырёх стран: 5 из Чехии, 4 из Словакии, 8 из Австрии и 8 из Швейцарии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется из Чехии.

3. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 32°, *AD* — биссектриса, угол *BAD* равен 23°. Найдите угол *ADB*. Ответ дайте в градусах.

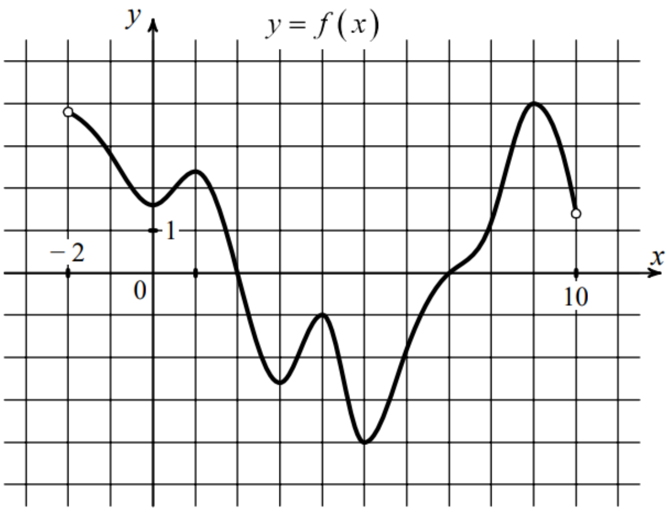


4. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{2\frac{2}{3}}-\sqrt{16\frac{2}{3}}\right):\sqrt{\frac{2}{75}}$.

5. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 10 и 24, и боковым ребром, равным 19.



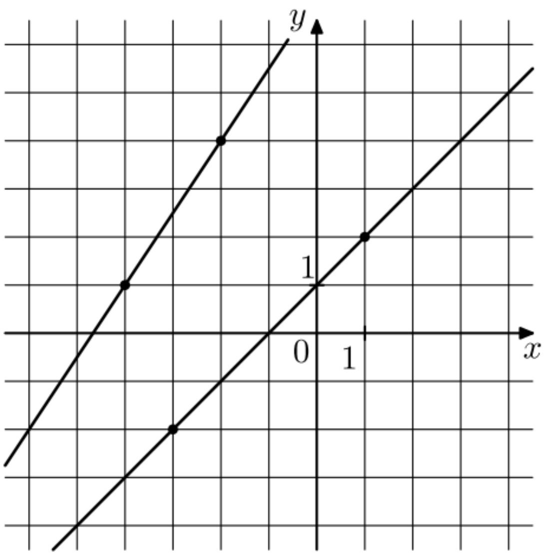
6. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-2;\ 10)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



7. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 66$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 24$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 36 км от города. Ответ дайте в минутах.

8. Моторная лодка прошла против течения реки 112 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

9. На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.



10. В коробке 8 синих, 6 красных и 11 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

11. Найдите точку максимума функции $y = \sqrt{12 + 8x - x^2}$.

12. а) Решите уравнение $(\mathrm{tg}^2 x - 3)\sqrt{18 \cos x} = 0$.
    б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi; \frac{11\pi}{2}\right]$.

13. На ребре BB_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 6$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

    а) Докажите, что плоскость FTD_1 делит ребро AA_1 в отношении $2 : 5$.
    б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью FTD_1.

14. Решите неравенство $x^3 + 3x^2 + \frac{12x^2+4x-20}{x-5} \leq 4$.

15. В июле планируется взять кредит на сумму 800 800 рублей. Условия его возврата таковы:

    — каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

    — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

    На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

16. Около окружности с центром *O* описана трапеция *ABCD* с основаниями *AD* и *BC*.
    а) Докажите, что *AB* — диаметр окружности, описанной около треугольника *AOB*.
    б) Найдите отношение площади четырёхугольника, вершины которого — точки касания окружности со сторонами трапеции, к площади самой трапеции $ABCD$, если известно, что $AB = CD$, а основания трапеции относятся как 1: 2.

17. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$2\sqrt{x+a} = a\sqrt{x-a}$$
    имеет единственное решение.

18. На доске разрешается написать n таких попарно различных натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, для которых при каждом натуральном числе $k = 2, \dots, n-1$ выполнено равенство $a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k-1}}{2}$.
    а) Можно ли при $n = 4$ написать на доске такие числа, чтобы также выполнялось равенство $a_4 = 2021$?

б) Можно ли при $n = 100$ написать на доске такие числа, чтобы также выполнялось неравенство $|a_2 - a_1| < 2021$?
в) При $n = 10$ на доске написаны такие числа. Какое наименьшее значение может принимать a_{10}?

19. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,6 при каждом отдельном выстреле. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,9?